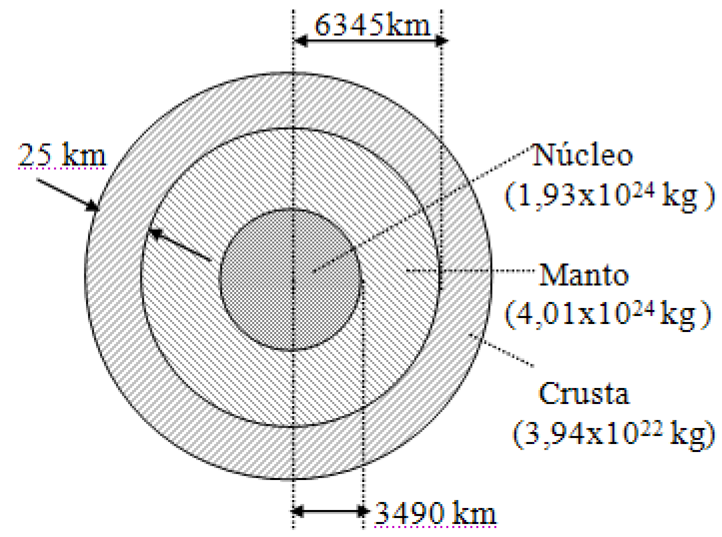
FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Aula 25

Gravitação: resolução de exercícios

Questão 1

A figura representa, embora não à escala, as diferentes camadas que compõem o interior da Terra, com as respectivas dimensões e massas. A Terra tem uma massa total de 5,98 10^{24} kg e um raio de 6370 km.



Ignorando a rotação da Terra e considerando-a esférica, calcule a aceleração da gravidade à profundidade de 25 km, na fronteira entre a Crusta e o Manto.

Qual seria o valor obtido se considerássemos a Terra com uma densidade de massa uniforme?

Aplicando o princípio de sobreposição, a força gravitacional exercida sobre um objecto de massa *m*, colocado entre a crusta e o manto, será dada pela soma das forças exercidas pelo núcleo e pelo manto. A crusta de espessura *d* exerce uma força igual a zero, já que o objecto está no seu interior. Vem então:

$$\vec{F} = -G\left(\frac{mM_{nucl}}{(R_T - d)^2} + \frac{mM_{manto}}{(R_T - d)^2}\right)\hat{r}$$

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = -G\left(\frac{M_{nucl} + M_{manto}}{(R_T - d)^2}\right)\hat{r}$$

$$g = 6{,}673\times 10^{-11} \times \left(\frac{1{,}93\times 10^{24} + 4{,}01\times 10^{24}}{(6345)^2 \times 10^6}\right) = 9{,}84\,\mathrm{m/s^2}$$

Sendo a Terra homogénea viria:

$$\vec{F} = -G\left(\frac{mM'}{(R_T - d)^2}\right)\hat{r} = -G\left(\frac{m\dfrac{3M_T}{4\pi R_T{}^3}\times\dfrac{4}{3}\pi(R_T - d)^3}{(R_T - d)^2}\right)\hat{r} = -G\left(\frac{mM_T(R_T - d)}{R_T{}^3}\right)\hat{r}$$

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = -G\left(\frac{M_T(R_T - d)}{R_T{}^3}\right)\hat{r}$$

$$g = 6{,}673\times10^{-11}\times\left(\frac{5{,}98\times10^{24}\times6345\times10^{3}}{(6370)^3\times10^9}\right) = 9{,}80\,\mathrm{m/s^2}$$

Questão 2

Mostre que a velocidade de escape de um dado objecto de um planeta está relacionada com a velocidade do mesmo objecto numa órbita circular logo acima da superfície do planeta através da seguinte expressão, em que v_e e v_c são as velocidades de escape e da órbita circular, respectivamente:

$$v_e = \sqrt{2}\, v_c$$

A velocidade de escape corresponde à velocidade inicial que se tem de dar a um corpo para que ele se consiga libertar da interacção gravitacional, ou seja, consiga atingir velocidade nula a distância infinita. Na situação inicial temos o corpo com velocidade v_e, à superfície do planeta de massa M e raio R. Na situação final, a energia cinética é nula e a potencial também. Temos então:

Situação inicial $$E_i = \frac{1}{2} m v_e^{\ 2} - \frac{GmM}{R}$$

Situação final – $E_f = 0$ $$\frac{1}{2} m v_e^{\ 2} - \frac{GmM}{R} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{2} m v_e^{\ 2} = \frac{GmM}{R} \;\Rightarrow\; v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Numa órbita circular de raio R, o objecto tem uma velocidade, v, tal que a sua aceleração centrípeta multiplicada pela sua massa seja igual à força gravitacional. Temos:

$$m\frac{v^2}{R} = G\frac{mM}{R^2} \;\Rightarrow\; v^2 = \frac{GM}{R} \;\Rightarrow\; v = \sqrt{\frac{GM}{R}} \;\Rightarrow$$

$$v_e = \sqrt{2}\, v$$